

Springer-Lehrbuch

## Statistik-Übungen

Beschreibende Statistik - Wahrscheinlichkeitsrechnung - Schließende Statistik

Bearbeitet von  
Prof. Dr. Günther Bourier

5., aktualisierte Auflage 2014. Buch inkl. Online-Nutzung. VII, 226 S. Kartoniert

ISBN 978 3 658 05994 1

Format (B x L): 16,8 x 24 cm

Wirtschaft > Betriebswirtschaft: Theorie & Allgemeines > Wirtschaftsmathematik und -  
statistik

Zu Inhaltsverzeichnis

schnell und portofrei erhältlich bei

**beck-shop.de**  
DIE FACHBUCHHANDLUNG

Die Online-Fachbuchhandlung [beck-shop.de](http://beck-shop.de) ist spezialisiert auf Fachbücher, insbesondere Recht, Steuern und Wirtschaft. Im Sortiment finden Sie alle Medien (Bücher, Zeitschriften, CDs, eBooks, etc.) aller Verlage. Ergänzt wird das Programm durch Services wie Neuerscheinungsdienst oder Zusammenstellungen von Büchern zu Sonderpreisen. Der Shop führt mehr als 8 Millionen Produkte.

## 2 Beschreibende Statistik

In diesem Kapitel werden Übungsaufgaben zu den Themenbereichen Parameter von Häufigkeitsverteilungen, Messzahlen, Verhältniszahlen, Indexzahlen, Zeitreihenanalyse und Regressions- und Korrelationsanalyse gestellt.

### 2.1 Parameter von Häufigkeitsverteilungen

Häufigkeitsverteilungen informieren, wie sich die Merkmalsträger einer Gesamtheit auf die Merkmalswerte oder auf Klassen von Merkmalswerten verteilen. Die typischen Eigenschaften von Häufigkeitsverteilungen können mit Hilfe von Parametern in komprimierter Form ausgedrückt bzw. beschrieben werden.

Die folgenden Übungsaufgaben befassen sich mit den Bereichen

- Mittelwerte
- Streuungsmaße
- Quantile
- Konzentrationsrechnung

#### Aufgabe 2.1 - A1: Fehlzeiten

In der nachstehenden Tabelle sind die Fehlzeiten (in Tagen) von 50 Arbeitnehmern (AN) eines Unternehmens für das vergangene Jahr angegeben.

Fehlzeit (Tage)	0	3	5	9	12	18	21
Anzahl der AN	5	9	13	9	8	4	2

- a) Berechnen Sie das arithmetische Mittel, den Modus und den Median!
- b) Berechnen Sie das 3. Quartil und das 9. Dezil!
- c) Berechnen Sie die mittlere absolute Abweichung, die Varianz und die Standardabweichung!
- d) Auf welchen Anteil der AN entfallen die unteren 75 % der gesamten Fehlzeit?
- e) Welcher Anteil der gesamten Fehlzeit entfällt auf die oberen (kränksten) acht Arbeitnehmer?

### Lösung 2.1 - A1: Fehlzeiten

Die nachstehende Arbeitstabelle dient der Durchführung und zugleich der übersichtlichen Darstellung erforderlicher Rechenoperationen:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
$x_i$	$h_i$	$H_i$	$F_i$	$x_i \cdot h_i$	$H_i^*$	$F_i^*$	$ x_i - \bar{x} $	$ x_i - \bar{x}  \cdot h_i$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot h_i$
0	5	5	0,10	0	0	0,00	7,66	38,30	293,38
3	9	14	0,28	27	27	0,07	4,66	41,94	195,44
5	13	27	0,54	65	92	0,24	2,66	34,58	91,98
9	9	36	0,72	81	173	0,45	1,34	12,06	16,16
12	8	44	0,88	96	269	0,70	4,34	34,72	150,68
18	4	48	0,96	72	341	0,89	10,34	41,36	427,66
21	2	50	1,00	42	383	1,00	13,34	26,68	355,91
	50			383				229,64	1.531,21

$x_i$  = Merkmalswert

$h_i$  = absolute einfache Häufigkeit

$H_i$  = absolute kumulierte Häufigkeit

$F_i$  = relative kumulierte Häufigkeit

$H_i^*$  = absolute kumulierte Häufigkeit (wobei  $h_i^* = x_i \cdot h_i$ ; Spalte 5)

$\bar{x}$  = arithmetisches Mittel

$n$  = Anzahl der Merkmalsträger (hier:  $n = 50$ )

$v$  = Anzahl der verschiedenen Merkmalswerte (hier:  $v = 7$ )

#### a) Mittelwerte

i) Arithmetisches Mittel:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^v x_i \cdot h_i = \frac{1}{50} \cdot 383 = 7,66 \quad (\text{Berechnung s. Spalte 5})$$

Die durchschnittliche Fehlzeit der Arbeitnehmer beträgt 7,66 Tage.

**Fehlerquelle:** Division der gesamten Fehlzeit 383 Tage mit  $v = 7$  (Anzahl der verschiedenen Merkmalswerte) anstatt mit  $n = 50$  (Anzahl der Arbeitnehmer).

ii) Modus:

Am häufigsten, nämlich 13-mal, wurde die Fehlzeit 5 Tage beobachtet.

iii) Median:

Die relative kumulierte Häufigkeit  $F = 0,50$  (Spalte 4) wird bei dem Merkmalswert 5 erreicht. (Mindestens) 50 % der Arbeitnehmer haben höchstens 5 Tage gefehlt, (mindestens) 50 % der Arbeitnehmer haben mindestens 5 Tage gefehlt.

## b) Quantile

i) 3. Quartil (75 % / 25 %):

Die relative kumulierte Häufigkeit  $F = 0,75$  (Spalte 4) wird bei dem Merkmalswert 12 erreicht.

(Mindestens) 75 % der Arbeitnehmer haben höchstens 12 Tage gefehlt.

ii) 9. Dezil (90 % / 10 %):

Die relative kumulierte Häufigkeit  $F = 0,90$  (Spalte 4) wird bei dem Merkmalswert 18 erreicht.

(Mindestens) 90 % der Arbeitnehmer haben höchstens 18 Tage gefehlt.

## c) Streuungsmaße

i) Mittlere absolute Abweichung:

$$\delta = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^v |x_i - \bar{x}| \cdot h_i = \frac{1}{50} \cdot 229,64 = 4,59 \quad (\text{Berechnung s. Sp. 9})$$

Die Fehlzeit der Arbeitnehmer weicht durchschnittlich um 4,59 Tage von der durchschnittlichen Fehlzeit 7,66 Tage ab.

**Fehlerquelle:** Division der gesamten Abweichung 229,64 mit  $v = 7$  (Anzahl der verschiedenen Merkmalswerte) anstatt mit  $n = 50$  (Anzahl der Arbeitnehmer).

ii) Varianz (mittlere quadratische Abweichung) und Standardabweichung:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})^2 \cdot h_i = \frac{1}{50} \cdot 1.531,21 = 30,62 \text{ Tage}^2 \quad (\text{s. Sp. 10})$$

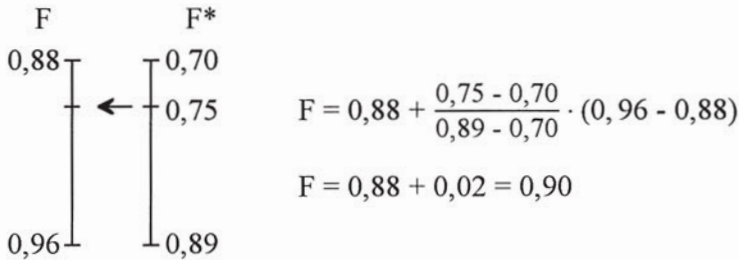
**Fehlerquelle:** Division der gesamten quadrierten Abweichung 1.531,21 mit  $v = 7$  (Anzahl der Merkmalswerte) anstatt mit  $n = 50$  (Anzahl der Arbeitnehmer).

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{30,62} = 5,53 \text{ Tage}$$

Eine inhaltliche Interpretation der Varianz (Dimension:  $\text{Tage}^2$ !) und damit auch der Standardabweichung als Wurzel aus der Varianz ist nicht möglich.

**d) Konzentrationsrechnung**

Gegeben:  $F^* = 0,75$  (s. Sp. 7); gesucht:  $F$  (s. Sp. 4)



Die unteren 75 % der gesamten Fehlzeit entfallen auf 90 % der Arbeitnehmer.

**Fehlerquellen:**

Als Intervallgrenzen für  $F^*$  werden nicht die beiden für  $F^* = 0,75$  unmittelbaren Nachbarwerte 0,70 und 0,89 gewählt, sondern weiter entfernt liegende Werte.

Es wird vergessen,  $f = 0,02$  zum Basiswert  $F_5 = 0,88$  zu addieren.

Oberflächliches Lesen der Aufgabenstellung führt zu Fehlern wie

- Quantilsberechnung anstatt Konzentrationsrechnung
- Verwechslung von  $F$  und  $F^*$ , d.h.  $F = 0,75$  anstatt  $F^* = 0,75$

**e) Konzentrationsrechnung**

Gegeben: Die oberen 8 Arbeitnehmer; gesucht:  $F^*$

Lösungsansatz 1: Die oberen  $2 + 4 + 2 = 8$  Arbeitnehmer haben

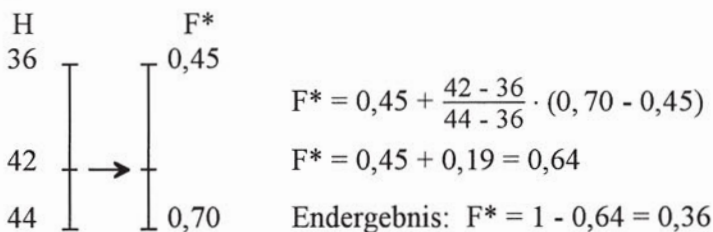
$$2 \cdot 21 + 4 \cdot 18 + 2 \cdot 12 = 138$$

Tage fehlt. Das sind  $\frac{138}{383} \cdot 100 = 36,0\%$  der gesamten Fehlzeit.

Lösungsansatz 2: (hier aufwändiger als Lösungsansatz 1)

Komplementfrage: Welcher Anteil der gesamten Fehlzeit entfällt auf die unteren (= "gesündesten")  $50 - 8 = 42$  Arbeitnehmer?

Gegeben:  $H = 42$  (s. Sp. 3); gesucht:  $F^*$  (s. Sp. 7)



Auf die oberen acht Arbeitnehmer entfallen 36 % der gesamten Fehlzeit.



**Fehlerquellen** beim Lösungsansatz 2:

Als Intervallgrenzen für H werden nicht die beiden für  $H = 42$  unmittelbaren Nachbarwerte 36 und 44 gewählt, sondern weiter entfernt liegende Werte.

Es wird vergessen,  $f^* = 0,19$  zum Basiswert  $F^* = 0,45$  zu addieren.

Bei dem Lösungsansatz über das Komplement wird vergessen, das Zwischenergebnis 0,64 von 1 abzuziehen.

Oberflächliches Lesen der Aufgabenstellung führt zu Fehlern wie

- Quantilsberechnung anstatt Konzentrationsrechnung
- Verwechslung von F und  $F^*$ , d.h. Umwandlung der absoluten Häufigkeit H in die relative Häufigkeit F

**Aufgabe 2.1 - A2: Betriebsrente**

Ein Unternehmen zahlt an seine 50 ehemaligen Arbeitnehmer (AN) monatliche Betriebsrenten. Nachstehend finden Sie die Häufigkeitsverteilung:

Betriebsrente (€)	40	50	60	70	80	90	100	140
Anzahl der AN	4	10	14	8	5	4	3	2

- a) Berechnen Sie den gesamten Rentenbetrag, den das Unternehmen monatlich an die 50 Betriebsrentner ausbezahlt!
- b) Berechnen Sie das arithmetische Mittel, den Median und den Modus!
- c) Berechnen Sie das 1. Quartil und das 1. Dezil!
- d) Berechnen Sie die mittlere absolute Abweichung, die Varianz, die Standardabweichung und den Variationskoeffizienten!
- e) Wie viele Rentner erhalten höchstens 80 € Betriebsrente?
- f) Welchen Anteil an der gesamten Betriebsrente haben die einkommenschwächsten 20 % und welchen die einkommenstärksten 20 % Betriebsrentner?
- g) Welcher Anteil der Rentner erhält die Hälfte der gesamten Rentenbetrags?

**Lösung 2.1 - A2: Betriebsrente****a) Gesamte Betriebsrente**

$$\sum_{i=1}^8 x_i \cdot h_i = 3.400 \quad (\text{Berechnung s. S. 10, Tabellensp. 5})$$

Die monatlichen Betriebsrenten betragen insgesamt 3.400 €.

Die nachstehende Arbeitstabelle dient der Durchführung und zugleich der übersichtlichen Darstellung erforderlicher Rechenoperationen:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
$x_i$	$h_i$	$H_i$	$F_i$	$x_i \cdot h_i$	$H_i^*$	$F_i^*$	$ x_i - \bar{x} $	$ x_i - \bar{x}  \cdot h_i$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot h_i$
40	4	4	0,08	160	160	0,05	28	112	3.136
50	10	14	0,28	500	660	0,19	18	180	3.240
60	14	28	0,56	840	1.500	0,44	8	112	896
70	8	36	0,72	560	2.060	0,61	2	16	32
80	5	41	0,82	400	2.460	0,72	12	60	720
90	4	45	0,90	360	2.820	0,83	22	88	1.936
100	3	48	0,96	300	3.120	0,92	32	96	3.072
140	2	50	1,00	280	3.400	1,00	72	144	10.368
50				3.400				808	23.400

## b) Mittelwerte

i) Arithmetisches Mittel:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^v x_i \cdot h_i = \frac{1}{50} \cdot 3.400 = 68 \quad (\text{Berechnung s. Sp. 5})$$

Die durchschnittliche Betriebsrente beträgt 68 €.

Modus:

Am häufigsten, nämlich 14-mal, wurde die Betriebsrente 60 € ausbezahlt.

ii) Median:

Die relative kumulierte Häufigkeit  $F = 0,50$  (Spalte 4) wird bei dem Merkmalswert 60 erreicht. (Mindestens) 50 % der Rentner erhalten eine Rente von höchstens 60 €.

## c) Quantile

i) 1. Quartil (25 % / 75 %):

Die relative kumulierte Häufigkeit  $F = 0,25$  (Spalte 4) wird bei dem Merkmalswert 50 erreicht.

Das untere Viertel der Rentner erhält eine Rente von höchstens 50 €.

ii) 1. Dezil (10 % / 90 %):

Die relative kumulierte Häufigkeit  $F = 0,10$  (Spalte 4) wird bei dem Merkmalswert 50 erreicht.

Das untere Zehntel der Rentner erhält eine Rente von höchstens 50 €.

#### d) Streuungsmaße

i) Mittlere absolute Abweichung:

$$\delta = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^v |x_i - \bar{x}| \cdot h_i = \frac{1}{50} \cdot 808 = 16,16 \quad (\text{Berechnung s. Sp. 9})$$

Die einzelnen Betriebsrenten weichen durchschnittlich 16,16 € von der durchschnittlichen Betriebsrente 68 € ab.

ii) Varianz (mittlere quadratische Abweichung) und Standardabweichung:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})^2 \cdot h_i = \frac{1}{50} \cdot 23.400 = 468 \text{ €}^2 \quad (\text{Berechnung s. Sp. 10})$$

Eine Interpretation ist nicht möglich (€<sup>2</sup>!).

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{468} = 21,63 \text{ €}$$

Auch für die Standardabweichung ist eine Interpretation nicht möglich.

iii) Variationskoeffizient

$$\frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{21,63}{68} \cdot 100 = 31,8 \%$$

Die Standardabweichung 21,63 € beträgt 31,8 % der durchschnittlichen Rente von 68 €.

#### e) Quantil

Gegeben:  $x = 80$  (s. Sp. 1); gesucht:  $H$  (s. Sp. 3);

Zu dem Wert  $x_5 = 80$  € gehört die absolute kumulierte Häufigkeit  $H_5 = 41$ .  
41 Rentner erhalten höchstens 80 € Rente.

#### f) Konzentrationsrechnung

i) Gegeben:  $F = 0,20$  (s. Sp. 4); gesucht:  $F^*$  (s. Sp. 7)

$$F^* = 0,05 + \frac{0,20 - 0,08}{0,28 - 0,08} \cdot (0,19 - 0,05)$$

$$F^* = 0,05 + 0,08 = 0,13$$

Die einkommenschwächsten 20 % der Rentner erhalten 13 % der Gesamtrente.



ii) Gegeben: Komplement zu  $F = 0,80$  (s. Sp. 4); gesucht:  $F^*$  (s. Sp. 7)

$$F^* = 0,61 + \frac{0,80 - 0,72}{0,82 - 0,72} \cdot (0,72 - 0,61)$$

$$F^* = 0,61 + 0,09 = 0,70 \text{ bzw. } 70 \%$$

Die einkommenstärksten 20 % der Rentner erhalten  $100 - 70 = 30 \%$  der Gesamtrente.

### g) Konzentrationsrechnung

Gegeben:  $F^* = 0,50$  (s. Sp. 7); gesucht:  $F$  (s. Sp. 4)

$$F = 0,56 + \frac{0,50 - 0,44}{0,61 - 0,44} \cdot (0,72 - 0,56)$$

$$F = 0,56 + 0,06 = 0,62$$

50 % der Gesamtrente entfallen auf die einkommenschwächsten 62 % der Rentner (bzw. 50 % der Gesamtrente entfallen auf die einkommenstärksten 38 % der Rentner).

### Aufgabe 2.1 - A3: Überstunden

Die nachstehende Häufigkeitsverteilung zeigt auf, wie viele Überstunden die 30 Arbeitnehmer (AN) einer Firma in der letzten Woche geleistet haben.

Überstunden	0	1	2	3	4	5	8
Anzahl der AN	7	3	4	9	4	2	1

- Wie viele Überstunden haben die Arbeitnehmer insgesamt geleistet?
- Berechnen und interpretieren Sie das arithmetische Mittel, den Median und den Modus!
- Ermitteln und interpretieren Sie das 3. Quartil und das 9. Dezil!
- Berechnen Sie die mittlere absolute Abweichung, die Varianz, die Standardabweichung und den Variationskoeffizienten!
- Welchen Anteil an den Gesamtüberstunden haben die unteren 25 % der Arbeitnehmer, welchen die oberen 25 % der Arbeitnehmer und welchen die unteren 25 Arbeitnehmer?
- Auf welchen Anteil der Arbeitnehmer entfallen die unteren 80 % der Überstunden, auf welchen die unteren 50 % der Überstunden?

**Lösung 2.1 - A3: Überstunden**

$$a) \sum_{i=1}^7 x_i \cdot h_i = 72$$

$$b) \bar{x} = \frac{1}{30} \cdot 72 = 2,4; \quad \text{Modus: } 3; \quad \text{Median: } 3$$

$$c) \quad 3. \text{ Quartil: } 3; \quad 9. \text{ Dezil: } 4$$

$$d) \quad \delta = \frac{1}{30} \cdot 45,2 = 1,51; \quad \sigma^2 = \frac{1}{30} \cdot 105,2 = 3,51; \quad \sigma = \sqrt{3,51} = 1,87$$

$$VK = \frac{1,87}{2,4} \cdot 100 = 77,9 \%$$

$$e) \quad i) \quad F^* = 0,00 + \frac{0,25 - 0,23}{0,33 - 0,23} \cdot (0,04 - 0,00) = 0,008$$

$$ii) \quad 1 - F^* = 1 - [0,15 + \frac{0,75 - 0,47}{0,77 - 0,47} \cdot (0,53 - 0,15)] = 0,495$$

$$iii) \quad F^* = 0,53 + \frac{25 - 23}{27 - 23} \cdot (0,75 - 0,53) = 0,64$$

$$f) \quad i) \quad F = 0,90 + \frac{0,80 - 0,75}{0,89 - 0,75} \cdot (0,97 - 0,90) = 0,925$$

$$ii) \quad F = 0,47 + \frac{0,50 - 0,15}{0,53 - 0,15} \cdot (0,77 - 0,47) = 0,746$$

**Aufgabe 2.1 - A4: Liefertreue**

Zur Ermittlung der Liefergenauigkeit einer Firma werden für 120 zufällig ausgewählte Artikel die Verspätungen festgestellt.

Verspätung (Tage)	0	1	2	3	4	6	10
Anzahl der Artikel	55	37	13	7	4	2	2

- Berechnen und interpretieren Sie das arithmetische Mittel, den Median und den Modus!
- Ermitteln und interpretieren Sie das 9. Dezil und das 95. Perzentil!
- Berechnen Sie die mittlere absolute Abweichung, die Varianz und die Standardabweichung!
- Welchen Anteil an der Gesamtverspätung haben 95 % der Artikel, welchen die oberen 10 % der Artikel und welchen die oberen 10 Artikel?

- e) Auf welchen Anteil der Art. entfallen die oberen 50 % der Gesamtverspätung?  
 f) Auf wie viele der Artikel entfallen die oberen 30 % der Gesamtverspätung?

### Lösung 2.1 - A4: Liefertreue

- a)  $\bar{x} = \frac{1}{120} \cdot 132 = 1,1$ ; Median: 1; Modus: 0  
 b) 9. Dezil: 3; 95. Perzentil: 4  
 c)  $\delta = \frac{1}{120} \cdot 128,4 = 1,07$ ;  $\sigma^2 = \frac{1}{120} \cdot 342,8 = 2,86$ ;  $\sigma = \sqrt{2,86} = 1,69$   
 d)  $F^* = 0,64 + \frac{0,95 - 0,93}{0,97 - 0,93} \cdot (0,76 - 0,64) = 0,70$   

$$F^* = 1 - [0,48 + \frac{0,90 - 0,88}{0,93 - 0,88} \cdot (0,64 - 0,48)] = 1 - 0,544 = 0,456$$
  

$$F^* = 1 - [0,48 + \frac{110 - 105}{112 - 105} \cdot (0,64 - 0,48)] = 1 - 0,594 = 0,406$$
  
 e)  $F = 1 - [0,88 + \frac{0,50 - 0,48}{0,64 - 0,48} \cdot (0,93 - 0,88)] = 1 - 0,886 = 0,114$   
 f)  $H = 120 - [112 + \frac{0,70 - 0,64}{0,76 - 0,64} \cdot (116 - 112)] = 120 - 114 = 6$

### Aufgabe 2.1 - A5: Kapitalanlage

Ein Investor hatte am 01. Januar 100.000 € für sechs Jahre angelegt. Die Verzinsung steigt von Jahr zu Jahr an und zwar von 3,00 über 3,25, 3,50, 4,00, 5,00 auf zuletzt 6,00 %. Die Zinsen werden dem angelegten Betrag stets zugeschrieben und mitverzinst.

- a) Bestimmen Sie die durchschnittliche jährliche Verzinsung!  
 b) Wie hoch ist das Kapital am Ende der Laufzeit?

### Lösung 2.1 - A5: Kapitalanlage

- a) Durchschnittliche Verzinsung

Da die Zinsen dem Kapital zugeschrieben und mitverzinst werden, handelt es sich um einen Wachstumsprozess. Das geometrische Mittel ist zu berechnen.

$$\sqrt[6]{1,03 \cdot 1,0325 \cdot 1,035 \cdot 1,04 \cdot 1,05 \cdot 1,06} = \sqrt[6]{1,274078} = 1,0412$$

Die durchschnittliche jährliche Verzinsung beträgt 4,12 %.

Statistik-Übungen

Beschreibende Statistik – Wahrscheinlichkeitsrechnung –

Schließende Statistik

Bourier, G.

2014, VII, 226 S. 8 Abb. Mit Online-Extras., Softcover

ISBN: 978-3-658-05994-1